Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

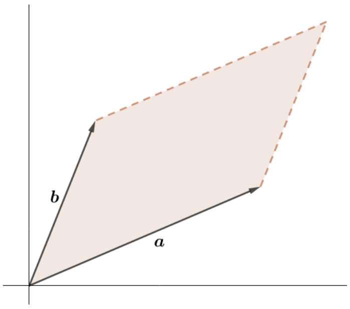
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 3

Wir haben uns Verfahren für lineare Gleichungssysteme und für die Berechnung des Ranges und der Inversen einer Matrix angeschaut: Sie beruhen auf den elementaren Zeilenumformungen. Bei den oben genannten Aufgaben kann man auch die (ziemlich abstrakt definierte) Determinante verwenden.



Determinanten hängen außerdem mit dem Volumen zusammen. In $\mathbb{R}^2$ bestimmen zwei Vektoren ein Parallelogramm (siehe Bild). In Aufgabe 4 wird gezeigt, dass der Flächeninhalt dieses Parallelogramms genau die Determinante dieser zwei Vektoren ist. (Das Vorzeichen hat mit der Orientierung zu tun.) Das gilt in allen Dimensionen: n Vektoren in $\mathbb{R}^n$ bestimmen ein (ggf. ausgeartetes) Parallelotop, dessen n-dimensionales Volumen genau der Betrag der Determinante dieser Vektoren ist.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure" (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 18. Mai 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. (a) Geben Sie falls möglich die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme an

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0\\ 6 & 2 & 2 & -1 & -2 & 10 & 5\end{pmatrix}.$$

Bringen Sie die Matrix A mittels des Gauß-Verfahrens in Zeilenstufenform. Bestimmen Sie den Rang von A, die Dimension des Kerns von A, eine Basis des Kerns von A und eine Basis des Bildes von A.

2. Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Es sei ein Vektor $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ gegeben.

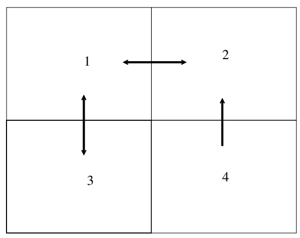
(a) Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement zum Unterraum $\mathbb{R}\boldsymbol{a}$ in $\mathbb{R}^2$ der Unterraum $\mathbb{R}\boldsymbol{n}$ ist, wobei $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dessen Zerlegung $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{\parallel} + \boldsymbol{b}_{\perp}$ mit $\boldsymbol{b}_{\parallel} \in \mathbb{R}\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}_{\perp} \in (\mathbb{R}\boldsymbol{a})^{\perp}$.

(c) Erklären Sie mit einem Bild, warum der Flächeninhalt des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bestimmten Parallelogramms gleich dem Flächeninhalt des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}_{\perp}$ bestimmten Rechtecks ist.

(d) Zeigen Sie, dass $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ der Flächeninhalt des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bestimmten Parallelogramms ist.

4. In dem abgebildeten Labyrinth mit den Räumen 1,2,3 und 4 befinden sich Mäuse. Zwischen einigen Räumen gibt es Durchgänge. Der Durchgang zwischen Raum 4 und 2 kann nur in Richtung von Raum 4 nach Raum 2 benutzt werden. Im Verlauf einer Versuchsreihe wurde die Anzahl der Mäuse in den Räumen je Minute protokolliert. Es wurde festgestellt, dass die Hälfte der Mäuse im Raum verbleibt. Die anderen wandern, ohne einen Durchgang zu bevorzugen, einen Raum weiter.



(a) Stellen Sie eine Übergangsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ auf, so dass zu gegebener Verteilung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ die Verteilung in der nächsten Minute durch $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ gegeben ist.

(b) Zu einem Zeitpunkt befinden sich 56 Mäuse in Raum 1, 44 Mäuse in Raum 2, 36 Mäuse in Raum 3 und 24 Mäuse in Raum 4. Wie verteilen sich die Mäuse nach zwei Minuten? Wie kann die Verteilung eine Minute vorher ausgesehen haben?

(c) Bestimmen Sie einen Gleichgewichtszustand, d.h. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ mit $A\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}$, wenn sich insgesamt 104 Mäuse im Labyrinth befinden. Berechnen Sie eine Basis von $\ker(A - I_4)$ mit der Einheitsmatrix $I_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.